rit Christoffersen og Otto B. Bekken,*

der distrikshøgskole
tboks 607
I KRISTIANSAND

ALGORISMUS I HAUKSBÓK

I europeisk perspektiv

En forstudie

I Kongespeilet sies det som kjent at kunnskap i regning er nyttig for kjøpmannen, men vi vet ellers lite om hvordan regningen foregikk før 1300-tallet her i Norden. I Codex Arnamagnæanus 544 qv, en del av Hauksbók, finner vi imidlertid en innføring i regning med hindu-arabiske tall, den eldste regnebok med "våre" tall på et nordisk språk. Vår interesse for denne avhandlingen, som kalles Algorismus, ble vakt av følgende omtaler av den:

i Hauks »Algorismus" er nok for størstedelen en temmelig tro oversettelse av latinske arbeider, særlig Sacroboscos »Tractatus de Arte Numerandi" (Brun 1964:207).

ii ... Dette stof dækker i det store og hele Sacroboscos Algorismus, men er fremstillet i en meget knappere og mere ufuldstendig form. If. Munch er der dog ikke tale om noget selvstændigt værk, men om en prosaovers. af Alexander fra Villedieu's »Carmen de algorismo" ... (Pedersen 1981:497).

iii ... Carmen de Algorismo. Det er dette digt, der ligger til grund for den islandske »Algorismus" i Hauksb.; ... (Jónsson 1892-96: CXXXI).

iv A translation of the Carmen de algorismo, written about 1325-1330, by a secretary of the celebrated Icelander Haukr Erlendsson. ... though in a few places it differs from that version of the Carmen published by Halliwell, it is without doubt a translation of the same work (Benedict 1914:19).

Disse svakt divergerende oppfatningene fikk oss til å spørre: Hva er rett? Hva var kilden til Algorismus? Hvor original er den? Hva forteller den oss om læring og forståelse av matematikk i 1300-tallets Ísland og Norge i forhold til ellers i Europa? Alle som kunne lese Algorismus, kunne kanskje lest den på latin. Hva kunne være grunnen til å lage en oversettelse?

Vi vet ellers at Petrus Philomena de Dacia, Peder Nattergal fra Danmark, i 1291 laget en kommentar på latin til Sacroboscos Algorismus Vulgaris, som fikk stor utbredelse i Europa. Finnes det her noen sammenheng til Algorismus i Hauksbók?

d verdifull assistanse av lektor, dr.phil. Egil N. Brekke .

1. Om Hauksbók og Haukr Erlendsson

Hauksbók er ett av de få middelalderhandskrifter der vi kjenner hovedhanda ved navn. På ett av bladene av AM 371 qv, et blad som nå er tapt, navngir skriveren seg som Haukr Erlendsson, jf. Helgason (1960: V, X). Så langt vi kan spore handskriftets historie tilbake i tida, har det derfor båret navnet Hauksbók og vært tilskrevet lagmannen Haukr Erlendsson.

> Hauksbók is exceptional, in that it can be linked with a particular man, whose life is known to some extent (Helgason (160: VI).

Haukr nevnes i de islandske annalene noen ganger, dessuten står han som utsteder av flere norske diplomer, noe som gjør oss i stand til i en viss grad å kunne kartlegge hans livsløp. Vi vet ikke når Haukr ble født, men vet at han ble utnevnt til lagmann på Ísland i 1294 og kom til Norge ca. 1301. I de følgende åra reiser han sannsynligvis et par ganger tilbake til Ísland. I et brev fra 1311 kalles han Gulatings lagmann og ridder. Fram mot 1322 ser det ut til at han har oppholdt seg i Norge og fungert som lagmann i Gulating. I åra 1322 til 1329 har vi ingen opplysninger om ham. Jónsson (1892-96: III) holder det for sannsynlig at han har oppholdt seg på Ísland i disse åra. Fra 1329 og fram mot sin død i Norge i 1334 forekommer han flere ganger i norske brev, nå bare kalt Herr Haukr Erlendsson.

Tre handskrifter utgjør Hauksbók: AM 371 qv, 544 qv og 675 qv. Vi finner minst 15 ulike skriverhender (Helgason 1960: IX). I tillegg til hovedhanda, Haukr Erlendssons egen, må vi regne med "to vistnok islandske afskrivere" (Jónsson 1892-96: XV) og flere norske hender. Hvordan vet vi at hovedhanda er Hauks egen? To originaldiplomer med Haukr som utsteder er skrevet med samme hand, nemlig DN I 93, datert 28. januar 1302 og DN II 103, datert 14. oktober 1310. I tillegg finnes et fragment av Gulatingslova, utgitt i faksimile i Gamalnorske membranfragment i Riksarkivet, Oslo 1963.

Dersom disse tekstene ikke er skrevet av Haukr sjøl, må de være skrevet av en fast medarbeider gjennom flere år. Kapitteloverskriftene i Hauksbók er visstnok også Hauks egne, på noen unntak nær (Munch 1847: 194, Helgason 1960: XXII). Handskriftet må være kommet i stand før Hauks død i 1334. Det har rådd ulike oppfatninger m.h.t. nedskrivningstida, noe vi ikke skal drøfte her.

Språkforma i deler av Hauksbók har også vært satt i forbindelse med språket i Lund 15 fol (tidligere Lund 12), som bl.a. inneholder Seyðabrævið og skal være skrevet i Bergen mens Arne Sigurdsson var biskop der (1304-14), for seinere å inngå i biskopens boksamling, jf. Seip (1934: 46 f.). Men Sørlie (1965) har vel vist at det ikke er noe intimt samband mellom Hauksbók og Lund 15 fol.

Munch (1847:198) mente å gjenkjenne en av skriverne av Hauksbók i AM 415 qv og 732 b qv, som begge til dels inneholder skrifter med komputistisk innhold. AM 415 qv inneholder også Annales vetustissimi, også kalt Hauks annaler, noe som vel skyldes synet Munch hadde på disse annalene. Betegnelsen er »mindre rigtig", sier Kålund (1889-94: 619). Storm (1888: VIII f.) har vist at Munchs syn var ukorrekt:

> ... ingen af Hænderne i 415 qv er identisk med Hauks Skrivere, medens de vel kan siges at være beslægtede og høre til samme Tid eller Skriverskole.

AM 732 b qv inneholder på sin side en bemerkelsesverdig kommentar til feilen ved den julianske kalender »som røber en for en Mand i Aaret 1313 sjælden astronomisk Indsigt", framholder Munch (1847:201).

Noe endelig svar på spørsmålet om forholdet mellom disse skriverhendene har ikke vi satt oss som mål å gi her. Dersom Storm har rett i at det ikke er noen forbindelse mellom Hauksbók og AM 415 qv når det gjelder skriverhender, er det vel heller ikke noen forbindelse til 732 b qv.

Synet på Haukr Erlendssons egen rolle i avskriver- eller bearbeidingsprosessen når det gjelder de enkelte tekstene i Hauksbók har vært skiftende. Munch (1847) mente at Haukr hadde gjort en sjølstendig litterær innsats, særlig p.g.a. »hans Bearbeidelse af Landnamsbogen". Jónsson (1892-96) prøver på den annen side å vise at Haukr ikke har satt sitt personlige preg på tekstene i Hauksbók i det hele tatt. Om Algorismus sier han f.eks. (CXXXII):

> Til at tillægge Haukr nogen som helst andel i oversættelsen eller bearbejdelsen savnes der holdepunkter.

Seinere forskning har imidlertid vist at det nok finnes et mellomstandpunkt:

> Hoveddelen af H. er således ikke blot en kompilation, men repræsenterer i flere tilfælde et bevidst redaktionsarbejde, delvis af indholdsmæssig, delvis af mere stilistisk art (Benediktsson 1981:251).

Helgason (1960: XVIII) konkluderer med at Haukr nok ikke var noen sjølstendig forfatter, som Munch holdt ham for, men heller ingen alminnelig avskriver, som Jónsson ville redusere ham til.

2. Algorismus

Foruten i Hauksbók (AM 544 qv bl. 90r–93r) finner vi Algorismus, avhandlingen om innføringa og bruken av de hindu-arabiske tall, også i det noe yngre GKS 1812 qv (bl. 13v–16r). Hos Johannessen og Simensen (1975:93) og Seip (1955:226) er teksten i dette handskriftet feilaktig betegnet som fragment. AM 685 qv inneholder også Algorismus, og et fragment fins i AM 716 III qv, som dateres til 1400-tallet (Kålund 1889-94:165). Jónsson (1892-96: CXXXI f.) kommer med noen antydninger om forholdet mellom de handskriftene som inneholder Algorismus, men har ikke foretatt noen fullstendig tekstkritisk analyse av dem. Dette ville være en interessant oppgave som vi må la ligge i denne sammenheng.

Den norrøne Algorismus inneholder avslutningsvis et avsnitt av metafysisk art, som ikke finnes i de latinske kildene vi skal se på nedenfor. Brun (1962:34) peker på at idéen i dette avsnittet kommer fra Platons Timaios, et verk vi visstnok ellers aldri finner henvisninger til i den norrøne litteraturen (Pedersen 1981:498). Tegningen av »cubus perfectus" som vi blir forespeilt i aller siste setning i dette avsnittet, mangler i alle de norrøne versjonene.

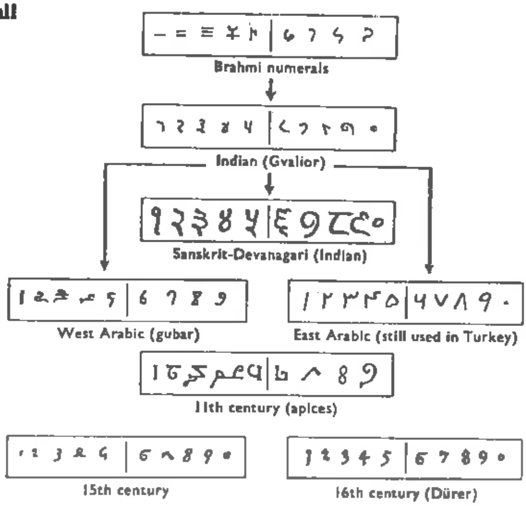
Algorismus er skrevet av ei hand som er blitt betegnet som Haukr Erlendssons »første islandske sekretær". Samme hand har skrevet siste del av Fóstbroeðra saga, som står umiddelbart foran Algorismus, og en del av Eiríks saga rauða, som følger like etter. Om språkforma sier Jónsson (1892-96: XLVI):

> Den »første" sekretærs retskrivning er i det hele rent islandsk, uden nogle som helst norske ejendommeligheder,

mens Seip (1954:126) mener at avhandlingen er innført av en norsk skriver i Hauksbók, noe som må være feil.

Algorismus ble utgitt for første gang av Munch i 1848, trykt i Annaler for nordisk Oldkyndighed og Historie, sammen med dansk oversettelse. Seinere er avhandlingen utgitt av Jónsson i Hauksbók (1892-96), og endelig i faksimileutgaven av Hauksbók fra 1960, ved Helgason.

3. De hindu-arabiske tall



Munch (1847) kaller tallene i Algorismus for «arabiske tall", slik som vanlig var på 1800-tallet. Som illustrasjonen ovenfor etter Menninger (1969:418) viser, kan våre tallsymbol spores tilbake til de indiske Brahmi-symbolene. Den eldste referansen til dette posisjonelle tallsystemet utenfor India kjenner vi fra år 662 fra biskop Severus Sebokt i Syria (Smith 1958:167):

> ... the science of the Hindus, their subtle discoveries in this science of astronomy, discoveries that are more ingenious than those of the Greeks and the Babylonians; their valuable methods of calculation; and their computing that surpasses description. I wish only to say that this computation is done by means of nine signs.

Araberne kalte alltid tallsymbolene og regnemetodene for indiske. Deres første systematiske møte med hinduenes tallsystem, som vi kjenner til, fant sted i Bagdad under Khalif al-Mansur i 773. På hans befaling ble da Brahmaguptas astronomiverk oversatt til arabisk (Colebrooke 1817: LXIV).

Den eldste kilde på arabisk kjent i dag er Al-Uqlidisis Al-Hisab al-Hindi skrevet i Damaskus i 953. Innledningsvis sier han (Saidan 1978:35):

> ... I have looked into the works of the past arithmeticians versed in the arithmetic of the Indians, and I have met the experts noted in our age for writing a book on it or having a good knowledge of it...
> I thus produce what the past scientists versed in this matter would appreciate, were they to read it, and find better than their works, clearer, more detailed and more worthy of possessing.
> ... I have also added to it and enriched it; for I have transferred to it all the arithmetic of the Rūm (byzantinerne) ...

Dette tyder på at det på hans tid allerede fantes en del arbeider om emnet. Hva disse arabiske skriftene egentlig refererer til med hensyn til indisk opphav, er først blitt klart for oss på 1900-tallet, da vi fikk oversettelser av og kommentarer til hinduenes matematikkverk. I dag er:

Aryabhatas Aryabhatiya fra 499
Brahmaguptas Brahma-sphuta-siddhanta fra 628
Mahaviras Ganita-sara-sangraha fra 850
Bhaskaras Siddhanta-siromani (Lilavati) fra 1150

tilgjengelige for oss på engelsk (Clark 1930, Colebrooke 1817, Rangacarya 1912). Bortsett fra Mahaviras verk er dette "siddhantas", dvs. astronomiverk, med egne kapitler om den matematikken som trengs. Men her gis eksempler på anvendelser fra et vidt felt av samfunnslivet. Hos Mahavira finner vi enda sterkere enn i Kongespeilet understreket hvor viktig det var å lære seg å regne (Rangacarya 1912:5):

> In all transactions which relate to wordly, Vedic or other similar religious affairs calculation is of use. In the science of love, in the science of wealth, in music and in drama, in the art of cooking, in medicine, in architecture, in prosody, in poetics and poetry, in logic and grammar and such other things, and in relation to all that constitutes the peculiar value of the arts, the science of calculation (ganita) is held in high esteem.

Som Algorismus i Hauksbók, starter Mahavira med å forklare posisjonssystemet og å navngi enerplass, tierplass osv., opp til 25. plass og å liste opp åtte regneoperasjoner: multiplikasjon, divisjon, kvadrering, kvadratrot, kubering, kubikkrot, addisjon og subtraksjon. I India går bruken av det desimale posisjonssystemet i hvert fall tilbake til ca. 300 f.Kr.

Hvordan de indiske tallsymbolene og posisjonssystemet først fant veien til Europa, er det ikke enighet om. For den delen av spørsmålet som vi her er interessert i, nemlig bakgrunnen for Algorismus, er forholdet noe mer avklaret.

Den fremste matematikeren i Bagdad på 800-tallet var Muhammed ben Musa Al-Khwarizmi. Han er mest kjent for sin bok Aljabr w'al muqabalah - opphavet til vårt ord og emne algebra. Også han understreker sitt praktiske siktepunkt (Rosén 1831:3):

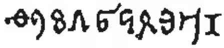
> That fondness for science, by which God has distinguished the IMAM AL MAMUN..., - has encouraged me to compose a short work on Calculating by (the rules of) Completion and Reduction, confining it to what is easiest and most useful in arithmetic, such as men constantly require in cases of inheritance, legacies, partition, law-suits, and trade, and in all their dealings with one another, or where the measuring of lands, the digging of canals, geometrical computation, ...

Al-Khwarizmi skrev også ei regnebok. Denne ble oversatt til latin i Toledo omkring 1130, og en versjon finnes i dag i Cambridge (utgitt av Vogel 1963). Teksten begynner slik (Vogel 1963:9):

> DIXIT algorizmi: laudes deo rectori nostro ... decreuimus exponere ac patefacere: de numero indorum per. IX. literas...
> DIXIT algorizmi: Cum uidissem yndos constituisse IX literas in uniuerso numero suo ... Fecerunt igitur .IX. literas, quarum figure sunt he:

Vig 

Disse "novem literas" mangler i Cambridge-handskriftet, og er ovenfor gjengitt fra det eldste eksempel vi kjenner i Europa, Codex Vigilanus fra 976 (Vogel 1963:51). I Algorismus i Hauksbók skrives tallene slik:



Vi ser at Al-Khwarizmis navn er blitt latinisert til algorizmi. Herfra har vi fått ordet algoritme, og herfra kommer Hauksbóks betegnelse Algorismus, som navn på det araberne kaller hinduisk regning (al-Hisab al-Hindi) (Saidan 1978).

I middelalderens Europa finner vi fire typer handskrifter om tall og tallregning:

> **Tallteoretiske verk** som bygger på en gresk tradisjon fra Euklid og Nikomakos via Boethius til Jordanus Nemorarius (ca. 1225).
>
> **Abakus-verk** om handelsregning på regnebrett med "calculi", "jetons" eller " counters", og med romertall.
>
> **Computi ecclesiastici**, dvs. oppskrifter for å finne kirkekalenderen, for å regne ut påske og andre flyttbare helligdager.
>
> **Algorismer** - om grunnleggende regneteknikker i et desimalt posisjonelt tallsystem.

Her i Norden finner vi bare de to siste typene representert. En diskusjon av komputus-litteraturen i Norden finnes hos Beckman og Kålund (1914-16).

De tre algorismene som framfor andre fikk utbredelse i Europa, ble skrevet på 1200-tallet:

Leonardo Fibonacci fra Pisas Liber Abaci fra 1202
Alexander de Villa Dei's Carmen de Algorismo fra ca. 1225
Johannis de Sacroboscos Algorismus Vulgaris fra ca. 1230.

I det lange løp var det Fibonaccis verk som fikk størst betydning, fordi de første trykte aritmetikkbøker fra Italia ca. 1500 bygget på det. I den perioden som vi ser på, rundt 1300, hadde de to andre størst utbredelse. Før vi ser nærmere på disse to og deres tilknytning til Algorismus i Hauksbók, bør vi se litt på

4. Ulike tallsystemer og regnesett

Med kjennskap til 10 tegn (sifre) og viten om hva som menes med et posisjonssystem med grunntall 10, kan vi uttrykke ethvert tall. Plassen (posisjonen) til sifrene dikterer oss at 5432 betyr 5 på 1000-plassen, 4 på 100-plassen, 3 på 10-plassen og 2 på 1-plassen. Dvs.

$$5432 = 5\cdot1000+4\cdot100+3\cdot10+2\cdot1 = 5\cdot10^3+4\cdot10^2+3\cdot10^1+2\cdot10^0.$$

Videre er ikke 54320 det samme som 5432, fordi denne tilføyingen av en null til høyre gjør at nå står 5 på 10000-plassen, 4 på 1000-plassen, ... og 0 på 1-plassen. De tidligste posisjonssystemer hadde ikke et slikt symbol, 0, for å markere en tom plass.

I dag tar vi det for gitt at 5432 skal oppfattes som et tall i 10-tallsystemet, slik som foran. Hva om vi ble fortalt at sifrene skulle bety det vi er vant til, men at tallet skulle oppfattes i 8-tallsystemet? – Vel, det ville bety at

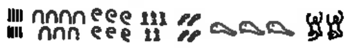
$$5432 = 5\cdot8^3 + 4\cdot8^2 + 3\cdot8^1 + 2\cdot8^0 \quad (= 2842 \text{ i 10-tallsystemet}).$$

Vi er så oppdratt i 10-tallsystemet at vi har problemer med å oppfatte tallets størrelse uten å foreta denne omregninga til 10-tallsystemet.

I utviklinga av vårt desimalsystem finner vi fem hovedelementer: grunntall, sifrering, posisjonsklarering, bruk av null og bruk av komma. Viktige drivkrefter i denne utviklinga er bl.a. behandlingen av brøker, algoritmer for de fire hovedregningsartene, materialet en "skrev" på og overgangen fra regnebrett til regning på papir. I denne utviklinga fram mot vårt desimale tallsystem skiller en gjerne mellom fire hovedtyper system:

i) enkle additive system

Et slikt system er de **egyptiske hieroglyfer** fra før 3500 f.Kr, med gruppering i potenser av 10 .Tall som 1234567 og 2345678 ville skrives (Chace 1979):

 eller 

I et additivt system blir hvert symbol gjentatt så ofte som nødvendig, og verdiene blir så addert. Rekkefølgen av symbolene spiller ingen rolle. Systemet har få symboler. Også **romertall-systemet** i sin eldste form var reint additivt. Subtraksjonsprinsippet kom først til seinere.

ii) siffersystem

Som et nytt steg i utviklinga, får en nye symbol - sifre - mellom potensene av grunntallet. Et slikt system er det **jonisk greske** fra Lilleasia ca. 400 f. Kr. Dette tallsystemet var i bruk i gresk storhetstid. Bortsett fra tre sifre som var lånt fra det fønikiske alfabetet: "vau" for 6, "koph" for 90 og "sampi" for 900, var sifrene identiske med bokstavene i det greske alfabetet. Systemet fikk dermed 27 grunntegn, 9 tegn for tallene 1-9, 9 for tierne mellom 10 og 90, og 9 for 100-900. Med dette kunne alle tall opp til 999 uttrykkes med høyst tre symboler. Det blir mange tallsymbol å huske, men skrivemåten blir ofte kortere enn i enklere system. Rekkefølgen (posisjonen) til symbolene betyr egentlig ingenting, sjøl om visse rekkefølger ble vanligere enn andre.

iii) multiplikative system

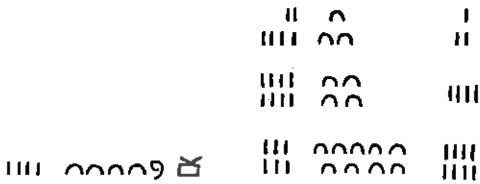
Når vi leser et tall som i innledningen, sier vi "5 tusen 4 hundre og 3ti2". Et mellomsteg på veien fra dette tallordet til tallsymbolet 5432, ville være å skrive 5tu4h3t2 - altså med forkortelser for ordene tusen, hundre og ti. Her har vi to sett symboler - ett sett for grunnsifrene 1, 2,... 9 og ett sett for potenser av grunntallet t, h og tu, f.eks. Ett slikt system er det **tradisjonelt kinesiske**.

I et slikt system spiller fortsatt ikke rekkefølgen av symbolene stor rolle - vi kunne like gjerne skrive 4h3t5tu2. Noe symbol for null trengs heller ikke, idet femtusenogtretti skrives 5tu3t. Først når lang praksis har standardisert skrivemåten til 5tu4h3t2, innser en at tu, h, t kan underforstås, og en når fram til posisjonsskrivemåten 5432. Men samtidig trenger en egentlig også et symbol for å markere en tom posisjon.

iv) **posisjonssystem**

Det eldste posisjonssystemet vi kjenner, er det **babylonske 60-tallsystemet.** Dette var en kombinasjon av additivt og posisjonelt system - det var enkelt additivt opp til 59 med to tegn V = 1 og < =10. Deretter var systemet posisjonelt - fra 60 av begynte de på nytt ved å innføre en ny posisjon som skulle angi antall 60'ere osv.

Det konkurrerende tallsystemet i Europa på Hauks tid var det **enkle additive** romertallsystemet. Fordi regningen foregikk på abakus, regnebrett, vet vi lite om hvordan regning på papir ville blitt utført i dette systemet. Fra den egyptiske Rhind-papyrusen, kopiert av Ahmes ca. 1650 f. Kr., vet vi mer om slik regning i et additivt system . Multiplikasjonen i et additivt system, her representert ved Rhind-papyrusen, foregikk ved de to regneprosessene **gjentatt dobling** og **halvering.** I papyrusens problem 32 utføres multiplikasjonen 12·12 slik (Chace 1969:73):



<u>Gjentatt dobling</u> gir 2·12=24, 4·12=48, 8·12=96. Da 8+4=12, settes / ved disse, og vi adderer 96+48=144.

Dette krever bare kjennskap til 2-gangen. Som følge av det hieroglyfiske systems enkle, additive natur, betyr 2-ganging bare **dobling av hvert symbol** med 10-gruppering. Multiplikasjon blir dermed ført tilbake til opptelling. Også i Algorismus i Hauksbók beskrives regneprosessene **dobling** og **halvering.** (Jónsson 1892-96:419):

Hv*er*sv tvefallda skal tolvna

Ef þv vill tvefallda nokkvra tolv þa rita fyrst. slika tolv er þer likar þar. nęst tvefallda þv þa fig*v*rv. er mest veit til vinstri handar. *ok* rita i nęsta stad þat er af hleypr. sem i vidr lagning. Ex ef semiss stendr yfir vp*p*i i ysta stad. þa leǵ. við. ein*n*. þvi at þar var adr iofn tala er i helminga var. skipt.

En*n* ef þv vill helming af taka. þa rita slika tolv. sem. þv vill *ok* tak af helming en*n*i fyrstv. fig*v*rv. ef hvn er. iofn.

Denne egyptiske metoden med gjentatte doblinger var også i bruk hos grekerne og araberne, men ikke hos hinduene.

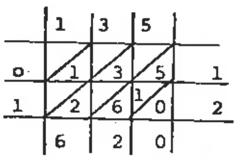
Hos hinduene, her representert ved Bhaskara, forklares regneprosessene på poetisk vis i Siddhanta-siromani. Bhaskara henvender seg til Lílávatí, en vakker kvinne, kanskje hans datter, med ordene (Colebrooke 1817:1):

> ... I propound this easy process of computation, delightful by its elegance, perspicuous with words concise, soft and correct, and pleasing to the learned.

For multiplikasjon beskriver han så med ord seks ulike metoder, alle posisjonelt organisert, og gir eksemplet:

> Beautiful and dear **Lílávatí**, whose eyes are like a fawn's! tell me what are the numbers resulting from one hundred and thirty-five, taken into twelve?

Dernest følger løsningen på 6 ulike vis:



```
135  135
  1    2
 270
 135
1620
```

```
12   12   12
 1    3    5
12        60
     36
   1620
```

```
135  1   135
135  2   270
        1620
```

```
135  8  1080
135  4   540
        1620
```

```
135   20   2700
       •      •
135    8   1080
           1620
```

(Colebrooke 1817:6f.)

Også Sacrobosco presenterer 6 metoder for multiplikasjon.

Eksemplene foran gir et utvalg av de mange mulige tallsystem og regnesett (for multiplikasjon) som har vært i bruk – og som til dels ennå preget 12-1600-tallets Europa. En kalender for året 1432 representerer høyeste grad av inkonsistens ved å si at et skuddår har «ccc og seksti og 6 dager", og ved Universitetet i Padua 1348 finner vi påbudet «non per cifras sed per literas claros" (Smith and Karpinski 1911:133). Hill (1915) har katalogisert bare 870 eksempler på bruk av hindu-arabiske tall i Europa før 1500. Motstanderne påstod blant annet at disse tallene var lettere å forfalske enn romertall. F.eks. lot 0 seg lett forandre til 6 eller 9 (The Open University 1976:68).

Eksemplene foran viser at det viktigste ved innføringen av hindu-arabiske tall er den fullstendige endringen av prinsipper. Dette ble ikke alltid forstått. Noen anvendte de nye tallsymbolene på regnebrett uten å ta i bruk posisjonssystemet. Andre grep posisjonsidéen, men anvendte romertallene eller hebraiske bokstaver som talltegn. Atter andre brukte hindu-arabiske tegn og system i utregningene, men ga sluttsvaret med romertall (Smith and Karpinski 1911).

Algorismus i Hauksbók er altså ei lærebok i regning med posisjonssystem. På Hauks tid var imidlertid utfallet av kampen mellom de to systemene på ingen måte klart. Det tok nye 300 år, fram til ca. 1600, før regnebrettmetodene forsvant, til tross for de fordelene vi med våre etterpåkloke øyne kan se ved posisjonssystemet når det gjelder å effektivisere regneprosessene på papir. Vi må se Algorismus i Hauksbók også mot denne bakgrunnen.

Allerede ca. 800 fantes det papirmøller i Bagdad. Først 1154 kom de til Spania. De første trykte aritmetikkbøker kom ut i Italia 1478 og 1494. Tilgangen på papir og utviklingen av boktrykking førte til gradvis standardisering mot våre skrive-og regnemåter. Abakusregningen forsvant i Europa, og dobling/halvering forsvant fra lærebøkene etter hvert som en innså at dette bare representerte spesialtilfelle av multiplikasjon/divisjon uten egen verdi lenger.

Bortsett fra addisjon og subtraksjon, ble regneprosessene ansett som vanskelige. Fra denne tida finnes en anekdote om en ung tysker som fikk det råd at addisjon og subtraksjon kunne han nok lære seg i Tyskland, men for å lære multiplikasjon og divisjon burde han dra til Italia (Dantzig 1954:26). Dette bedret seg. Det vokste fram et regnemester-laug som ledet tyske skoler i handelsregning.
To av de mest populære bøkene herfra var Jacob Köbels Rechenbuch auff linien und Ziffern (1514) og Adam Rieses Rechnen auff den Linien und Federn (1525).

Det var disse to som i 1552 dannet grunnlaget for den første regnebok på dansk av Herman Veigere: En Kaanstelig och nyttelig Regne Bog faar Scriffuere, Fogeder, Købmend, Och andre som bruge Købmandskaff, paa Linyerne met Regne pendinge, och met Zifferne udi heelt och brødit tal... Av fortalen framgår det at det dreier seg om både »danske tal" = romertall, og om »Figurer (som menig Mand kalder ziffer), hvilket navn egentlig kun tilkommer 0" (Larsen 1952:7f), altså holdes både regning med sifre og med romertall i hevd.

Vi ser altså at Hauksbóks Algorismus var langt forut for sin tid her i Norden, og det er vel urettferdig når Brun (1962:32) sier:

> Den største interesse ved Hauks bok ligger derfor i de norske ordene han har valgt for matematiske begreper.

5. Kildene for Algorismus i Hauksbók

Smith and Karpinski (1911:99) framholder at det snarere var handelsmannen enn vitenskapsmannen som brakte de hindu-arabiske tall til Europa. Økt handel førte til større behov for effektive regnemetoder. Fibonaccis Liber Abaci og de første trykte italienske matematikkverkene har et slikt praktisk siktemål. Det er derimot ikke tilfelle når det gjelder algorismene til Villa Dei og Sacrobosco. De skrev lærebøker for studenter. I tillegg til algorismene vi skal omtale nærmere her, skrev de også de to mest utbredte komputusverk fra denne tida. Vanskelighetene med kalenderutregningen er utvilsomt én av grunnene til det oppsvinget vi finner i matematiske studier ved klosterskoler og universiteter på 1200-tallet.

Mens Fibonaccis Liber Abaci har fått grundig behandling av historikerne, blir Villa Dei og Sacrobosco bare ofret korte kommentarer. Dette kan forklare de divergerende utsagn om opphavet til Algorismus i Hauksbók. Mye tyder på at få virkelig har gått til kildene og sammenliknet dem. Ett unntak er Benedict (1914), som tydeligvis har gått til kildene i sin grundige studie. Hun viser hvilken sentral rolle Carmen de Algorismo og Algorismus Vulgaris må ha spilt gjennom flere århundrer, og presenterer også Petrus Philomena de Dacia på en måte som yter verket hans rettferdighet (1914:16f):

> ... In this work are found not only careful and scholarly explanations of the text of Sacrobosco, and numerous illustrative examples, but also additions to the algorism especially in the matter of proofs and the subject of series and progression. The commentary was written in 1291 ...

Algorismus i Hauksbók kaller hun (1914:17f):

> A translation of the Carmen de algorismo, written about 1325-30, by a secretary of the celebrated Icelander, Haukr Erlendsson ...

> og sier videre:

> This algorism contains about 2700 words, and though in a few places it differs from that version of the Carmen published by Halliwell, it is without doubt a translation of the same work.

Allerede ei sammenlikning av åpningslinjene i Carmen de Algorismo og Algorismus Vulgaris tyder på at Benedict (1914) har rett i at Carmen er kilde for Algorismus i Hauksbók. Carmen begynner slik (Halliwell 1841:73):

HÆC algorismus ars præsens dicitur, in qua Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris ...	Denne kunst kalles algorismus. I den har vi nytte av disse to ganger fem indiske tegn ...

Åpningslinjene i Algorismus Vulgaris er disse (Curtze 1897:1):

Omnia, quae a primaeva rerum origine processerunt, ratione numerorum formata sunt, ...	Alt som siden tingenes første begynnelse har utviklet seg, er blitt til ved tall...

mens vi i Algorismus i Hauksbók finner denne innledningen (Jónsson 1892-96:417):

> List þessi heitir algorism*v*s. hana fvndo fyst indv*er*skir men*n* *ok* skipvdv med .x. stofu*m*. þei*m* er. sua erv ritnir ·0987654321. En*n* fyrsti stafr merk*ir* ein*n* i fyrsta stað en*n* anar .ij. hin*n*. þridi. þria *ok* hver eptir. þvi sem skipadr er allt til hins. sidasta. *er* cifra heit*ir* *ok*. sk*al* þessa stafi fra hęgri hendi vp*p* hefia *ok* rita til vinstri handar sem. ebreskv;

Alexander de Villa Dei kom fra byen Villedieu i Normandie. Han døde i 1240, underviste i Paris i 1209, daterte sin Massa Compoti i 1200 og skrev antakelig Carmen de Algorismo omtrent på samme tid. Alle hans verk, også en latinsk grammatikk, ble skrevet på vers.

Sjøl om posisjonelle regnemetoder er mer effektive ved papirregning, stiller de også større mentale krav. Det blir nødvendig å huske verdien av flere tallsymbol, å memorere addisjons- og multiplikasjonstabellene for disse symbolene, å huske de posisjonelle prinsippene og å automatisere regneoppsett for de ulike regningsartene ut fra dette. Det er lettere å pugge og å huske slike ting på vers, noe som forklarer denne for oss uvante formen. Typiske læreboksformer var verseformen og dialogformen.

Johannis de Sacrobosco var fra Holywood (=Halifax i dag) og studerte i Oxford. Omkring 1220 dro han til Paris og ble der professor i matematikk og astronomi. Han sto på toppen av sin berømmelse 1230-1235. Da skrev han flere verk:

De sphaera mundi, basert på Ptolemaios' Almagest. Dette ble det rådende astronomiverket i Europa fram mot 1600.

De computo ecclesiastico, hvor han bl.a. peker på den voksende feilen i den julianske kalenderen og foreslår en forbedring. Denne kom, som vi vet, først 350 år seinere, i 1584 under pave Gregor XIII.

De algorismo, som ifølge Cantor (1913:88) er:

> ... eine Sammlung von Regeln ohne den geringsten Beweis, ohne Zahlenbeispiel, ohne Erwähnung einer Quelle, aus welcher der Verfasser schöpfte. Aber in dieser Nüchternheit, in dieser Kürze eignete es sich vortrefflich dazu, den Grundriss zu einem die zahlreichen Lücken mündlich ergänzenden Unterrichte zu bilden, und wurde es Jahrhunderte lang in solcher Weise benutzt.

Verken De sphaera ... eller De computo ... anvender hindu-arabiske tall.

Curtze (1897:VI) fant hele 45 avskrifter av De Algorismo bare i Erfurt, München og Wien. Grunntrekkene ble lest opp og skrevet av setning for setning. Innimellom ble de så kommentert med eksempler. Det er en slik kommentar vi har fra Petrus Philomena de Dacia, se Curtze (1897).

Under regningen ble sifrene i de gitte tallene gradvis visket ut og erstattet med sifrene i resultatet, f.eks. ble 369 + 235 utført slik:

369	374	404	604
235	235	235	235

Det ble da nødvendig med en kontroll, og Sacrobosco gir "nierprøva". Dette gjør ikke Haukr. Men i avsnittet om multiplikasjon står det (Jónsson 1892-96:420):

> Ef. þv grvnar hvar(t) þv hefir rett margfalldat. þa skipt i svndr alla tolvna. vm margfalldan. þat er sv tala er. vndir stoð *ok* mentv fa hina. somv tolv *ok*. fyn hafdir. þv.

Hos Bhaskara finnes også et eget kapittel kalt "inversjon" om det å regne seg tilbake.

Villa Dei og Sacrobosco ble tidlig oversatt og kommentert på engelsk. I Steele (1922:3-51) finner vi: **The Crafte of Nombrynge**, Egerton ms. 2622, som er en gjengivelse på latin med kommentarer på engelsk av Carmen de Algorismo, og **The Art of Nombryng**, Ashmole ms. 396, som er en oversettelse til engelsk med kommentarer av Tractatus de arte numerandi. Også på fransk finnes en oversettelse av Carmen, som ifølge Mortet (1909:55) er bevart i to handskrifter fra 1200-tallet.

Teksten i Hauksbók stemmer ikke helt med den versjonen av Carmen de Algorismo Halliwell (1841) bygger på (Jónsson 1892-96:CXXXII). Muligens står Egerton ms. 2622 nærmere vår tekst.

Også ved nordiske biblioteker finner vi avskrifter av verkene til Villa Dei og Sacrobosco. Foreløpig har vi ikke hatt tilgang til GKS 1348 qv, som skal inneholde en latinsk algorismus på vers. I Antiquarisk Tidsskrift (1846-48:107) hevdes det at innholdet stemmer med Algorismus i GKS 1812 qv og AM 544 qv, og med teksten i Halliwell (1841). Jónsson (1892-96:XXXII) mener derimot at disse versene ikke har noen direkte sammenheng med Algorismus i Hauksbók. NKS 275 a og DKB Add. 477 2° skal begge inneholde Sacroboscos Sphaera, Computus og Algorismus (Pedersen 1981:496f.).

Kjente Sacrobosco til Carmen de Algorismo? I Carmen (Halliwell 1841:24f.) finner vi ei oppramsing av sju regningsarter:

Septem sunt partes, non plures, istius artis; Addere, subtrahere, duplareque dimidiare; Sextaque dividere est, sed quinta est multiplicare; Radicem extrahere pars septima dicitur esse. Subtrahis aut addis a dextris vel mediabis; A leva dupla, divide, multiplicaque; Extrahe radicem semper sub parte sinistra.

Denne kunstens deler er sju, ikke fler; å addere, subtrahere, dublere, halvere, den sjette er å dividere, men den femte er å multiplisere. Å trekke ut rota sies å være den sjuende. Du trekker fra, adderer eller halverer fra høyre. Fra venstre dublerer, dividerer og multipliserer du. Trekk alltid ut rota fra venstre.

De fire siste linjene siteres nesten nøyaktig av Sacrobosco (Curtze 1899:7). Ellers bruker Sacrobosco ikke verseformen. Dette kan jo tyde på at Sacrobosco bygger på Carmen. Men både i antall regningsarter og rekkefølgen som de tas opp i selve teksten, avviker han fra Carmen. Hos Sacrobosco finner vi denne oppregningen (Curtze 1897:1):

Huius autem artis novem sunt species, scilicet Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progressio et Radicum extractio, et haec dupliciter, quoniam in numeris quadratis et cubicis.

Denne kunsten består av ni slag, nemlig nummerering, addisjon, subtraksjon, halvering, dobling, multiplikasjon, divisjon, progresjon og rotutdraging, og det siste på to måter ettersom det gjelder kvadrat -eller kubikktall.

Setningen om to typer røtter finnes ikke i Carmen. Den finner vi imidlertid igjen i Algorismus i Hauksbók, som ellers følger Carmen når det gjelder antallet regningsarter og rekkefølgen mellom dem (Jónsson 1892-96:418):

> I siay stadi er skip(t) þessarar listar grein*um*; heit*ir* et fyrsta vidr lagnign an*n*at af drattr. þridia tvefalldan fiorda helminga. skipti .v. margfalldan .vi. skipting .vij. at taka rot vndan. *ok* er sv grein a tvęr leidir. An*n*at er at taka rot vndan fer skeyttri tolu . En*n* an*n*at er þat at taka rot vndan att hyrndri tolv þ*ei*ri er verpils voxt hef*ir*;

Tidligere har vi sett hvordan ordet "algorismus" kommer fra en latinisering av navnet Al-Khwarizmi. I The Crafte of Nombrynge finner vi følgende spekulasjoner over dette (Steele 1922:3):

> Ther was a kyng of Inde, þe quich heyth Algor, & he made þis craft. And aft*er* his name he called hit algory*m*; or els anoþ*er* cause is quy it is called Algorym, for þe latyn word of hit s. Algorism*us* comes of Algos, grece, *quid est* ars, latine, craft on englis, and rides, *quid est numerus*, latine, A nomb*ar* on englys, . . . this present craft ys called Algorism*us*, in þe quych we vse teen signys of Inde. Questio. ¶ Why ten fyguris of Inde? Solucio. for as I haue sayd afore þai were fonde fyrst in Inde of a kynge of þat Cuntre, þat was called Algor.

Vi finner ikke noe grunnlag for slike spekulasjoner i Carmen sjøl eller i Hauksbók. Denne kunstens opphav presenteres der, knapt men klart, som hos Al-Khwarizmi, jf. s.7.

Vi finner liknende spekulasjoner over ordet «algorismus" i The Art of Nombryng, og her finnes det grunnlag hos Sacrobosco, som sier (Curtze 1897:1):

Hanc igitur scientiam numerandi compendiosam quidam philosophus edidit nomine Algus, unde et Algorismus nuncupatur, (quae) vel ars numerandi, vel ars introductoria in numerum interpretatur ...

Denne nyttige kunnskapen om bruken av tall ble frambragt av en filosof ved navn Algus. Derfor blir den også kalt algorismus, noe som står for regnekunsten eller innføringen i den ...

Sinistrorsum autem scribimus in hac arte more arabico sive iudaico, huius scientiae inventorum, vel hac ratione, et meliori, ut in legendo consuetum ordinem servantes maiorem numerum minori praeponamus.

I denne kunsten skriver vi mot venstre på arabisk eller jødisk vis, opphavsmennene til denne kunnskap, eller på følgende og bedre vis - at vi under lesningen følger den sedvanlige rekkefølgen og setter det større tallet foran det mindre.

Slik kan Sacrobosco være kilden til misoppfatningen av tallene som «arabiske tall". Petrus de Dacia er klar over det indiske opphav (Curtze 1987:25):

Antiqui enim volentes repraesentare unitatem, vel binarium, vel ternarium, unum tractum vel duos vel tres scripserunt, scilicet I, II, III, IIII etc. Item dicitur, quod numeratio est repraesentatio numeri artificialis per figuras sibi competentes. Non enim omnis numerus per quascumque figuras Indorum repraesentatur, sed tantum determinatus per determinatam...

For når de gamle ville gjengi enheten, tofoldet eller trefoldet, skrev de en, to eller tre streker, altså I, II, III, IIII etc. Videre heter det at «numeratio" er en kunstig framstilling av tall ved tegn som tilsvarer dem. For ikke ethvert tall blir gjengitt ved hvilket som helst indisk talltegn - bare et visst tall av et visst tegn.

Men også han sier innledningsvis (Curtze 1897:21):

Qui enim artem hanc numerandi tradidit, erat quidam philosophus ALGUS nomine Arabicus ...

Den som har overlevert denne regnekunsten, var en arabisk filosof som het Algus.

Historikerne er enige om at algorismene bygger på en eller annen versjon av Al-Khwarizmis regnebok, men både Villa Dei og Sacrobosco avviker på vesentlige punkter fra Cambridgemanuskriptet. Dette avbrytes midt i et multiplikasjonseksempel - $3\frac{1}{2} \times 8\ {}^{3}/_{11}$ (Vogel 1963:42). Ellers behandler altså Al-Khwarizmi regning med både seksagesimalbrøker og vanlige brøker slik som andre indiske og arabiske kilder. Alt om brøkregning mangler hos Villa Dei, Sacobosco og også i Hauksbók. Det eneste spor av brøk i Hauksbók finner vi under «Um helmingaskipti" (Jónsson 1892-96:419):

> En*n* ef þv vill helming af taka. þa rita slika tolv. sem. þv vill *ok* tak af helming en*n*i fyrstv. figvrv. ef hvn er. iofn. En*n* ef hvn er viofn. þa skipt i helminga. þvi er af einvm hleypr. *ok* tak vp*p* ein*n*. en*n* rita yf*ir* vp*p*i þan*n* staf er helming hverss hlvtar merkir. *ok* vęr kollu*m*. semiss. *ok* sva er gior. . 𝔶. en*n* set. cifrv i stadin*n*. þar nęst. tak af an*n*ari. figvrv. helming at sama hętti ef hvn er iofn.

Grunnlaget for dette er igjen Villa Dei. I Sacrobosco-oversettelsen The Art of Nombryng finner vi derimot (Steele 1922:38):

> ... other resolue it in .60. mynvtes and sette aside half of tho minutes so, ... as thus .30. ...

Han følger her Al-Khwarizmi (Vogel 1963:46); og halvparten av 1 skrives opp som 30 (dvs 30/60) under enersifret. Al-Khwarizmi refererer igjen til inderne med:

eo quod unitatem in 60 sexagenas partes tantum indi dividere voluerunt.	... enheten i 60 sekstideler slik som inderne ville dele den.

I dag vet vi at dette går tilbake til babylonernes sekstitallsystem.

Mens Al-Khwarizmi navngir posisjonene som unitates, deceni, centeni, mille, ... slik som vi gjør i dag, innfører både Villa Dei og Sacrobosco de kunstige ordene "digitus", "articulus" og "compositus". Dette gjør også Hauksbók (Jónsson 1892-96:417):

> Þar nest heyrir þat til at uita þren*n*a. grein; stafana *ok* allrar tolu þvi at avll tala min*n*i en*n* .x. heit*ir*. fingr en*n* sv tala avll er tigu*m* gegn*ir*. heit*ir* liðr hvart sem hvn er meiri eda min*n*i en su tala er allt er saman liðr *ok* fingr. heitir samsett tala;

Vi har her innslag fra en gresk tradisjon via Boethius. Det samme gjelder odde og jamne tall, og idéen om tall som en samling enheter mens én sjøl ikke betraktes som et tall. Dette finner vi ikke hos hinduene eller hos Al-Khwarizmi. Hauksbók har et avsnitt om jamne eller ujamne tall (Jónsson 1892-96:418):

> Hverssu iofn edr viofn tala verdr
>
> Hveria tolo er þv ritar. þa er hun iofn ef tigvm gegn*ir* eða. iafn fingr er um fram. en*n* aull tala er oiofn ef oiafn fingr er um fram . Iafn*ir* fin*n*gr ery fior*ir*; 246.8. en*n* viafn*ir* adr*ir*. fiorir; 3579;

Og her står også:

> En*n* ein*n* er hvarki þvi at h*an*n er eigi tala helldr vp*p*haf allr*ar* tolv.

Vi finner ikke grunnlag for dette siste i Carmen. Dette sies også i Hermann Veigeres første danske lærebok. Først på 1600-tallet blir 1 sett på som et tall på linje med 2, 3, 4 osv.

Disse foreløpige studiene viser at Jónssons utsagn s. 1 nok ligger nærmest sannheten: diktet Carmen de Algorismo ligger til grunn for Algorismus, men på flere vesentlige punkter finnes det avvik. Disse avvik tyder på at oversetteren er godt skolert i den tids viten:

- han lar seg ikke friste til vidløftige etymologiske spekulasjoner
- han har noen treffende kommentarer vi ikke finner i Carmen
- han stiller null på lik linje med de andre som siffer, men er klar over nullens litt spesielle rolle
- han ser ikke 1 som et tall på linje med de øvrige
- han omtaler to typer røtter
- han nevner vanlige brøker, ikke seksagesimalbrøker -

og til sist: han regner "baklengs" for å kontrollere om svaret er rett.

LITTERATURLISTE

Antiquarisk Tidsskrift 1846-48: Den Arnamagnæanske Kommision, Antiquarisk Tidsskrift, 1846-48, 87-135.

Beckman N. og Kålund Kr. 1914-16: Alfredi Jslenzk, Rimtǫl, STUGNL. Kbh.

Benedict, Susan R. 1914: A comparative study of the early treatises introducing into Europe The Hindu Art of Reckoning. Ph.D. Thesis, Univ. of Michigan.

Benediktsson Jakob, 1981: Hauksbók. Kulturhistorisk leksikon for nordisk middelalder 6, 250-251. Oslo 1956-78. Fotografisk opptrykk Rosenkilde og Bagger.

Brun, Viggo 1962: Regnekunsten i det gamle Norge. Oslo-Bergen.

Brun, Viggo 1964: Alt er tall. Matematikkens historie fra oldtid til renessanse. Oslo-Bergen.

Cantor, Moritz 1913: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band 1200-1668. Leipzig.

Chace, Arnold B. 1979: The Rhind Mathematical Papyrus. NCTM Classics.

Clark, Walter E. 1930:The Aryabhatiya of Aryabhata. Univ. of Chicago Press.

Colebrooke, Henry T. 1817: Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. London.

Curtze, Maximilianus 1897: Petri Philomeni de Dacia in Algorismum Vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius. Hauniae.

Dantzig, Tobias 1954: Number. The Language of Science. N.Y.

Halliwell, James Orchard 1841: Rara Mathematica. London. Reprinted by Georg Olms Verlag 1977. Hildesheim. New York.

Helgason, Jón 1960: Hauksbók. Manuscripta Íslandica, Vol. 5. Copenhagen.

Hill. G.F. 1915: The Development of Arabic Numerals in Europe. Oxford.

Johannessen, Ole-Jørgen og Simensen, Erik 1975: Norsk språk 1250-1350. Primærkjelder og sekundærlitteratur. Ein bibliografi. Oslo/Bergen.

Jónsson, Eiríkur og Finnur 1892-96: Hauksbók. Det Kongelige nordiske Oldskrift-Selskab, Kbh.

Kålund, Kr. 1889-94: Katalog over den Arnamagnæanske håndskriftsamling I-II. Kbh.

Larsen, L. Melchior 1952: Træk af regnekunstens historie i Danmark. Matematisk Tidsskrift A, 1-21.

Menninger, Karl 1969: Number Words and Number Symbols. MIT Press.

Mortet, Victor 1909: Le plus ancien traité français d'algorisme. Bibliotheca Mathematica 9, 55-62.

Munch, P.A. 1847: Om Ridderen og Rigsraaden Hr. Hauk Erlendssøn, Islands, Oslo og Gulathings Lagmand, og om hans literære Virksomhed. Annaler for nordisk Oldkyndighed og Historie, 169-216. Kjøbenhavn.

Munch, P.A. 1848: Algorismus, eller Anviisning til at kende og anvende de saakaldte arabiske Tal, efter Hr. Hauk Erlendssøns Codex meddelt og ledsaget med Oversættelse af P.A. Munch. Annaler for nordisk Oldkyndighed og Historie, 353-375. Kjøbenhavn.

Neugebauer, Otto 1969: The Exact Sciences in Antiquity. N.Y.

Pedersen, Olaf 1981: Matematisk litteratur. Kulturhistorisk leksikon for nordisk middelalder 11, 491-500. Oslo 1956-78. Fotografisk opptrykk Rosenkilde og Bagger.

Rangacarya, M 1912: The Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya. Government of Madras.

Rosén, Frederic 1831: The Algebra of Muhammed ben Musa Al-Khwarizmi. London.

Saidan, A.S. 1978: The Arithmetic of Al-Uqlidisi. Dordrecht/Boston.

Seip, Didrik Arup 1934: Studier i norsk språkhistorie. Oslo.

Seip, Didrik Arup 1954: Palæografi. B. Norge og Island. Nordisk Kultur 28: B. Stockholm-Oslo-København.

Seip, Didrik Arup 1955: Norsk språkhistorie til omkring 1370. 2.utg. Oslo.

Smith, David Eugene 1958: History of Mathematics. N.Y.

Smith, David Eugene and Karpinski, Louis Charles 1911: The Hindu-Arabic Numerals. Boston and London.

Steele, Robert 1922: The Earliest Arithmetics in English. Oxford Univ. Press.

Storm, Gustav 1888: Islandske Annaler indtil 1578. Udgivne for det norske historiske Kildeskriftfond . Chra. Fotografisk opptrykk Oslo 1977.

Sørlie, Mikjel 1965: En færøisk-norsk lovbok fra omkring 1310. Tórshavn-Bergen-Oslo.

The Open University 1976: History of Mathematics, Counting, Numerals and Calculation 3. Written numbers. The Open University Press.

Vogel, Kurt 1963: Muhammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus. Aalen.